CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Esercizi della prova scritta del 17 dicembre 2003

Studio di funzione:

1. Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} (x^2-1)e^x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ -\ln x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (h) punti di non derivabilità.

2. Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} (x-1)e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^3-1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 0$; (h) punti di non derivabilità.

Studio di grafico di funzione:

1. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

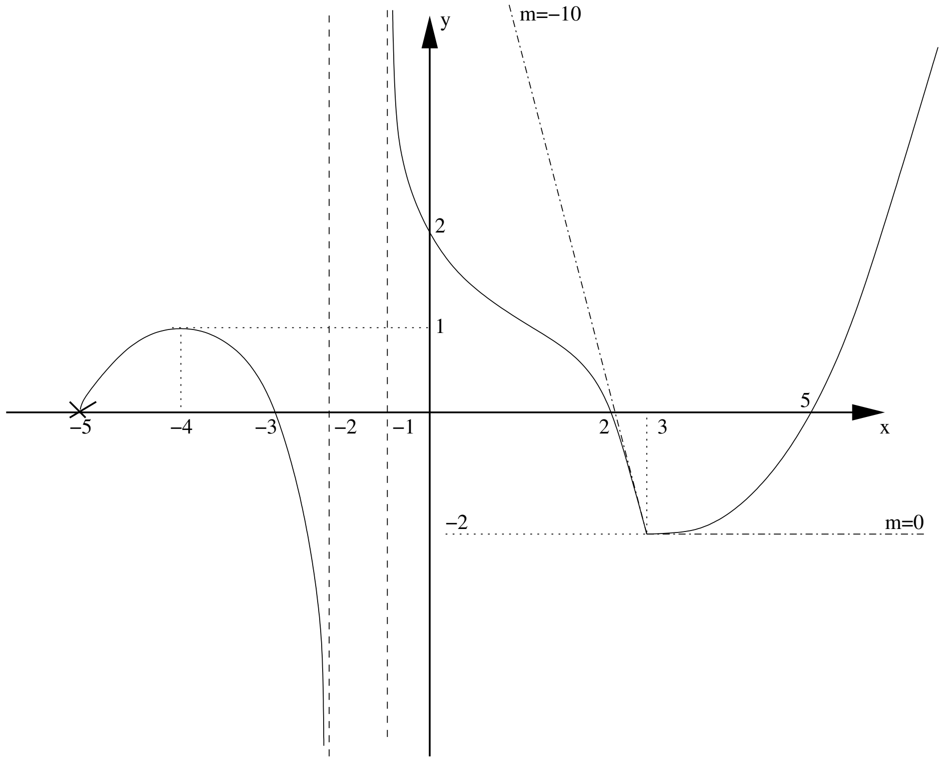

Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

2. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

Massimi e minimi:

1. Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $(0, 1]$ della seguente funzione:

$$f(x) := x - (x+1)^2$$

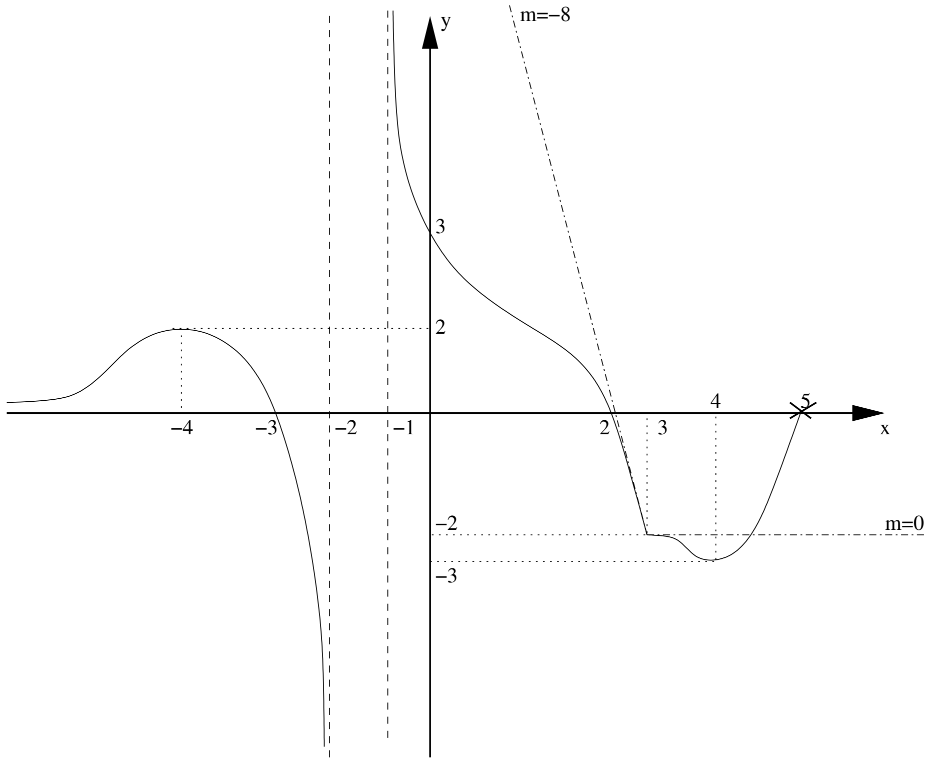

Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

2. Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $[0, 1)$ della seguente funzione:

$$f(x) := -x + (x + 1)^2$$

Zeri:

1. Stabilire se $f(x) := \ln x + \ln(x + 1) + x$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

2. Stabilire se $f(x) := e^x + \ln x + x$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

Punti fissi:

1. Stabilire se la curva $f(x) := x^3 - x^2 - 1$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 - x^2 - 1$.

2. Stabilire se la curva $f(x) := x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

Teorico:

1. Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{x^6 - x^5 + 1}$ ammette un punto critico nell'intervallo $[0, 1]$(giustificare la risposta).

2. Dire se $f(x) := 815e^{|x^{\ln(e^2)}+2x+1|^{1/2}-1}$ ammette massimo e minimo globale nell'intervallo $[0, 1]$ (giustificare la risposta).